

## 플라스틱 신틸레이터에 남는 에너지 구하기

뮤온을 플라스틱 신틸레이터에 쏘면 뮤온은 자기가 가진 에너지(운동량)을 일부 잃고 신틸레이터는 그 잃은 에너지 만큼 에너지를 검출하게 된다. 뮤온이 잃은 에너지 = 신틸레이터에서 검출된 에너지이다. 그렇다면 2GeV/c 뮤온은 얼마만큼의 에너지를 잃게 될 것인가? 이는 베테 블로흐 공식을 통해 추측할 수 있다.

입사 입자와 검출기 내부 물질들의 전자기적 상호작용으로 검출기는 작동한다. 에너지가 높은 전하 입사입자는 원자들을 이온화 시킬 수 있고 떨어져 나온 전자들을 가속시켜 검출 가능한 작은 전류로 만들 수 있다. 전기적으로 중성인 입사입자는 물질과 반응하여 일부 또는 에너지 전부를 핵들 또는 물질 내부 원자들에 속한 전자에게 전달하여 검출 가능한 전기신호를 만든다. 중성미자와 같은 전자기 상호작용이 없고 물질과 충돌할 확률이 매우 낮아서(단면적이 작고) 검출하기 힘들다.

전기를 띤 입사입자가 물질을 통과할 때 원자를 이온화 시키거나 원자 또는 분자들을 높은 상태로 들뜨게 함으로서 에너지를 남길 수 있다. (들뜨게 된 시스템은 광자를 방출하고 바닥상태로 떨어지게 된다.) 핵과의 충돌하여 에너지를 남길 수도 있으나 단면적이 매우 작다. 그래서 stopping power 을 결정하는 가장 큰 변수는 평균 이온화 에너지 I(The mean excitation potential)이다.

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] - (1)$$

위의 공식은 흡수체가 순수한 원소들(pure elements)일 경우 사용할 수 있다. 하지만 내가 사용한 플라스틱 신틸레이터는 PLASTIC SC VINYL TOLUENE 으로 분자식은 C9H10 인 화합물이다. 흡수체가 화합물일 경우 stopping power 을 구하는 두가지 방법이 있는데 우선 다음의 식을 이용해 2GeV/c 의 뮤온이 얼마의 에너지를 잃을지 계산해본다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \frac{w_1}{\rho_1} \left( \frac{dE}{dx} \right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2} \left( \frac{dE}{dx} \right)_2 + ..$$

$$w_i = \frac{a_i A_i}{A_m}$$

$$A_m = \sum a_i A_i$$

A 는 원자량(atomic weight)으로 수소의 원자량  $A_1=1.008$  탄소의 원자량  $A_2=12.011$  이다. 그리고  $a_i$  는 분자 M 에서 i 번째 원소의 원자 갯수를 의미한다. 예를 들어 메탄  $CH_4$  의 경우 a1 은 C 가 1 개이므로  $a_1=1$  이고 H 는 4 개이므로  $a_2=4$  이다. 내가 사용한 PLASTIC SC VINYL TOLUENE 은  $C_9H_{10}$  이므로  $a_1=10$   $a_2=9$  이다.

$$A_m = \sum a_i A_i = 10 * 1.008 + 9 * 12.011 = 118.179$$

$$w_1 = \frac{a_1 A_1}{A_m} = \frac{10 * 1.008}{118.179} = 0.08529$$

$$w_2 = \frac{a_2 A_2}{A_m} = \frac{9 * 12.011}{118.179} = 0.9147$$

그리고 수소의  $(\frac{dE}{dx})_1$  와 탄소의  $(\frac{dE}{dx})_2$  를 구하면 된다.

수소와 탄소의  $-C_0, a, m X_1, X_0$  등 constants for the density effect correction 찾을 수 없어 density correction 과 shell correction 을 제외하고 일단 계산해 본다.

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right]$$

수소와 탄소의 밀도와 I 는 geant4 material table 에서 가져온다.

수소의 밀도 =  $8.3748 * 10^{-5}$

수소의 I = 19.2 eV

수소의 Z = 1

수소의 A = 1.008

탄소의 밀도 = 2

탄소의 I = 81 eV

탄소의 Z = 6

탄소의 A = 12.011

뮤온의 질량이  $105.65 \text{ MeV}/c^2$  이고 전자의 질량이  $0.511 \text{ MeV}/c^2$  이므로

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2 + s^2}}$$

단일 충돌시 가장 크게 받는 에너지  $W_{max}$ (maximum energy transfer in a single collision) = 309.452 이다. 뮤온의 질량이 전자의 2000 배이지만 좀더 정확한 계산을 위해 위 식을 사용했다. ( $W_{max} \cong 2m_e c^2 \eta^2$ 을 이용하면  $W_{max} = 364.234$  이다.)

자 이제 수소의  $(\frac{dE}{dx})_1$ 와 탄소의  $(\frac{dE}{dx})_2$ 를 계산해보자.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)_1 &= 0.00040112 \\ \left(\frac{dE}{dx}\right)_2 &= 4.38073 \end{aligned}$$

신틸레이터의 밀도  $\rho = 1.032$ 와 앞서 구한 인자들을 모두 대입하자.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} &= \frac{w_1}{\rho_1} \left(\frac{dE}{dx}\right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2} \left(\frac{dE}{dx}\right)_2 = 0.08529/8.3748 * 1.e-5 * 0.00040112 + \\ &0.9147/2 * 4.38073 = 2.003527 \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dx} = 2.003527 * 1.032 = 2.06764$$

이는 2GeV/c 의 뮤온이 1cm 의 플라스틱 신틸레이터(PLASTIC SC VINYL TOLUENE)에 2.06764MeV 의 에너지를 남긴다는 뜻이다.

그리고 두번째 인자(Z, A, I.)등의 effective value 로 변환하여 식(1)에 바로 대입할 수 있다. 우선 베테 블로흐 공식에서 가장 주요한 인자인 I (mean excitation potential) 값을 구해보자. 만약 흡수체가 순수한 원소들로 이루어 졌다면(pure elements)

$$I/Z = 12 + 7/Z \quad (Z < 13)$$

$$I/Z = 9.76 + 58.8Z^{-1.19} \quad (Z \geq 13)$$

을 이용하여 I 를 구할 수 있다. 하지만 내가 이용하는 흡수체는 플라스틱 신틸레이터 같은 화합물 (mixture and compounds)이므로 I 를 구하고 싶다면 다른 방법으로 구해야 한다.

$$\ln I_{eff} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{eff}}$$

$I_{eff}$ 를 구하기 앞서  $Z_{eff}$ 를 구하자.

$$Z_{eff} = \sum a_i Z_i$$

위와 같은 방식으로 계산하면,

$$Z_{eff} = \sum a_i Z_i = 10 * 1 + 9 * 6 = 64$$

그리고 위의  $I_{eff}$ 를 다시 보자. 우리는 수소의  $I$ 값과 탄소의  $I$ 값을 알아야 한다. 각각의  $I$ 는 19.2와 81이다.

$$\ln I_{eff} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{eff}} = \frac{10 * 1 * \ln 19.2 + 9 * 6 * \ln 81}{64}$$

에서  $I_{eff} = 64.68\text{eV}$ 이라는 값을 얻을 수 있다. 이는 geant4 material table 에 있는 PLASTIC SC VINYL TOLUENE 에 나온  $I$ 값과 같다. 따라서  $\ln I_{eff} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{eff}}$  같은 방식으로 화합물의  $I$ 를 계산하는 것은 옳은 것으로 볼 수 있다. 나머지 인자들도 같은 방식으로 계산할 수 있다

$$\begin{aligned} A_{eff} &= \sum a_i A_i = 118 \\ \delta_{eff} &= \sum \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{eff}} \\ C_{eff} &= \sum a_i C_i \end{aligned}$$

위 값들을 구하면 아래 식에 바로 사용할 수 있다.

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{Z^2}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]$$

$$= 2.48921$$

아래 식은 density correction과 shell correction을 적용 시키지 않은 경우의 값이다.

$$2.48921 - 2.06764 / 2.48921 * 100 = 16.9\%$$